ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

1ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Ορίζουμε $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$.
α) Αν η f είναι 1–1 να δείξετε ότι η ρ είναι μετρική στον X.
β) Αν η f δεν είναι 1–1 να δειχθεί ότι η ρ δεν είναι μετρική στον X.

2) α) Αν ο ρ είναι μια μετρική στο X, να δείξετε ότι η $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d(x,y) = \sqrt{\rho(x,y)}$ είναι επίσης μετρική στον X.
β) Να δείξετε ότι δεν ισχύει γενικά ότι αν ρ είναι μια μετρική στο X τότε η $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d(x,y) = (\rho(x,y))^2$ είναι μετρική στον X.

3) Αν ρ, d είναι δυο μετρικές στο X τότε η $\sigma : X \times X \to \mathbb{R}$ με τύπο $\sigma(x,y) = \rho(x,y) + d(x,y)$ είναι επίσης μετρική στο X.

4) Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $(X_i, \rho_i)_{i=1}^k$ μετρικοί χώροι. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο

$$X = \prod_{i=1}^{k} X_i = \{(x_1, \ldots, x_k) : \ x_i \in X_i, \ i = 1, \ldots, k\}$$

και τη $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με τύπο $\rho\Big((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)\Big) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i, y_i)$.
α) Να δείξετε ότι η ρ είναι μετρική στο X.
β) Αν $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στον X με $\vec{x}_n = (x_n^1, \ldots, x_n^k)$, $n = 1, 2, \ldots$ και $\vec{x} = (x^1, \ldots, x^k) \in X$, να δείξετε ότι $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho} \vec{x}$ αν και μόνο αν $x_n^i \xrightarrow{\rho_i} x^i$ για $i = 1, \ldots, k$.

5) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $x, y \in X$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δυο ακολουθίες στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$. Να δειχθεί ότι $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

6) Αν (X, ρ) είναι μετρικός χώρος, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δυο ακολουθίες στο X και $x \in X$ ώστε $\rho(x_n, y_n) \to 0$ και $x_n \xrightarrow{\rho} x$, να δείξετε ότι $y_n \xrightarrow{\rho} x$.

7) Δώστε παράδειγμα μετρικού χώρου (X, ρ), $x_1, x_2 \in X$ και $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ώστε η ανοικτή μπάλα $B_\rho(x_2, \varepsilon_2)$ να είναι γνήσιο υποσύνολο της ανοικτής μπάλας $B_\rho(x_1, \varepsilon_1)$.

8) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, και $x_1, \ldots, x_n$ διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του X. Να δείξετε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U_1, \ldots, U_n$, ξένα ανά δύο με $x_i \in U_i$ για $i = 1, \ldots, n$.

9) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X και $x \in X$. Να δείξετε ότι:
α) Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει στο x, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\rho(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
β) Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει περεταίρω υπακολουθία που συγκλίνει στο x.

10)* Έστω (X, ρ), (Y, d) δυο μετρικοί χώροι, $f : X \to Y$ μια συνάρτηση και $x \in X$. Αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον (Y, d), να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x.

Εισαγωγή στην τοπολογία	5-3-20 4ο μάθημα

<u>Ορισμός</u>: Έστω $(X,\rho),(Y,\rho)$ δύο μ.χ. Μια συνάρτηση $f: X \to Y$ λέμε ότι: α) ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν υπάρχει $C \geq 0$ τ.ω.

$$d(f(x), f(y)) \leq C \cdot \rho(x,y), \ \forall x,y \in X$$

β) είναι ομοιόμορφα συνεχής αν $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ τ.ω. $\forall x,y \in X$ αν $\rho(x,y) < \delta$ τότε $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής (και άρα συνεχής)

<u>Απόδειξη</u>: Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά C.
Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτοντας $\delta = \varepsilon/2$ έχουμε ότι $\forall x,y \in X$ αν $\rho(x,y) < \delta$ τότε $d(f(x), f(y)) \leq C \cdot \rho(x,y) < C \cdot \delta = \varepsilon$

<u>Πρόταση</u>: Έστω (X,ρ) μ.χ.

α) Αν $x_0 \in X$ και ορίσουμε την συνάρτηση $f: (X,\rho) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x, x_0)$. Τότε η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz (με σταθερά 1) άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β) Αν $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ και $f: (X,\rho) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x, A)$ $[= \inf\{\rho(x,y) : y \in A\}]$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά 1. (Άρα είναι ομ. συνεχής.)

<u>Απόδειξη</u>: α) Όπως έχουμε δει $\forall x, y \in X$ ισχύει:

$$\underbrace{|\rho(x, x_0) - \rho(y, x_0)|}_{\overset{\shortparallel}{|f(x) - f(y)|}} \leq \rho(x, y)$$

Άρα η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά 1.

β) Όπως έχουμε δείξει αν $A \neq \emptyset$, $\forall a, b \in X$:

$$|\rho(a, A) - \rho(b, A)| \leq \rho(a, b) \Leftrightarrow$$

$$|f(a) - f(b)| \leq \rho(a, b), \ \forall a, b \in X$$

δηλαδή η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz με σταθερά 1, άρα είναι ομ. συνεχής.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $(X, \rho), (Y, d), (Z, \sigma)$ τρεις μ.χ. και $x_0 \in X$.

$f: X \to Y$, f συνεχής στο x_0

$g: Y \to Z$, g συνεχής στο $f(x_0)$.

Τότε η $(g \circ f): X \to Z$ συνεχής στο x_0.

<u>Απόδειξη</u>: <u>$1^{\text{ος}}$ τρόπος (με αρχή μεταφοράς)</u>:

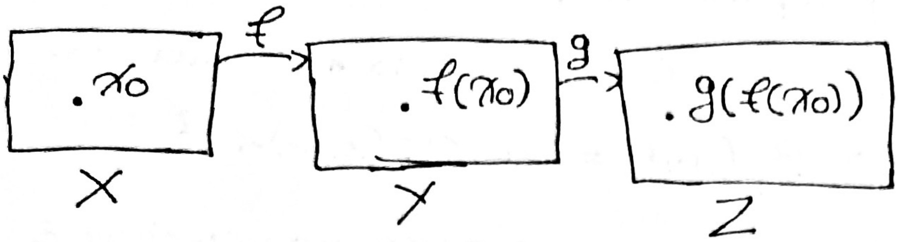
Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$.

Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0 από την αρχή της μεταφοράς προκύπτει ότι $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$.

Εφόσον η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ από την αρχή της μεταφοράς προκύπτει ότι $g(f(x_n)) \xrightarrow{\sigma} g(f(x_0))$

δηλαδή $(g \circ f)(x_n) \xrightarrow{\sigma} (g \circ f)(x_0)$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $(g \circ f)$ είναι συνεχής στο x_0.

2^{os} τρόπος (Με τον ορισμό): Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο $f(x_0)$.



υπάρχει $J>0$ ώστε $\forall y\in Y$ αν

$$\boxed{d(y,f(x_0))<J \text{ τότε } \sigma(g(y),g(f(x_0)))<\varepsilon} \quad (1)$$

Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta>0$, ώστε για κάθε $x\in X$ αν $\rho(x,x_0)<\delta$ τότε $d(f(x),f(x_0))<J$.

Έτσι για κάθε $x\in X$ με $\rho(x,x_0)<\delta$ έχουμε $d(f(x),f(x_0))<J$ άρα από (1) $\sigma(g(f(x)),g(f(x_0)))<\varepsilon$ δηλαδή $\sigma((g\circ f)(x),(g\circ f)(x_0))<\varepsilon$.

Επομένως η $(g\circ f)$ είναι συνεχής στο x_0.

<u>Πραγματικές συναρτήσεις</u> (από ένα (X,ρ) στο $\mathbb{R}$)

Αν $f,g:(X,\rho)\to\mathbb{R}$ και $x_0\in X$, ώστε f,g συνεχείς στο x_0 τότε η
- $f+g$ είναι συνεχής στο x_0
- $f\cdot g$ — // —
- $\lambda\cdot f$ — // —
- f/g (αν $g(x)\neq 0$, $\forall x\in X$) — // —

Ανοιχτά Σύνολα σε Μετρικούς Χώρους

<u>Ορισμός</u>: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $\varepsilon>0$ και $x_0\in X$.

α) Η ανοιχτή μπάλα με κέντρο το x_0 και ακτίνα ε είναι το σύνολο $B_\rho(x_0,\varepsilon)=\{x\in X: \rho(x,x_0)<\varepsilon\}$

β) Η κλειστή μπάλα με κέντρο το x_0 και ακτίνα ε είναι το σύνολο $\hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)=\{x\in X: \rho(x,x_0)\leq\varepsilon\}$

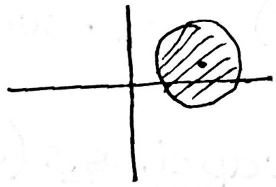
<u>Παραδείγματα</u>: α) Αν ρ είναι η συνήθης μετρική στου $\mathbb{R}$ $(\rho(x,y)=|x-y|)$

Για $x_0\in\mathbb{R}$ και $\varepsilon>0$:

$B_\rho(x_0,\varepsilon)=(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

$\hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon)=[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$

β) Στο $(\mathbb{R}^2,\rho_2)$

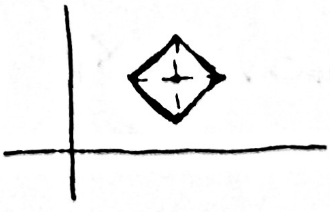


Για $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, $\varepsilon>0$:

$B_{\rho_2}((x_0,y_0),\varepsilon)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\varepsilon\}$

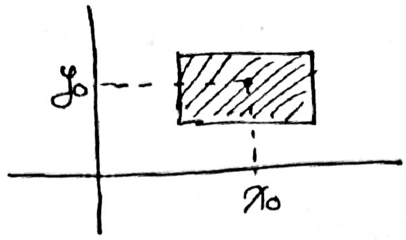
$\hat{B}_{\rho_2}((x_0,y_0),\varepsilon)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\varepsilon\}$

γ) $(\mathbb{R}^2,\rho_1)$

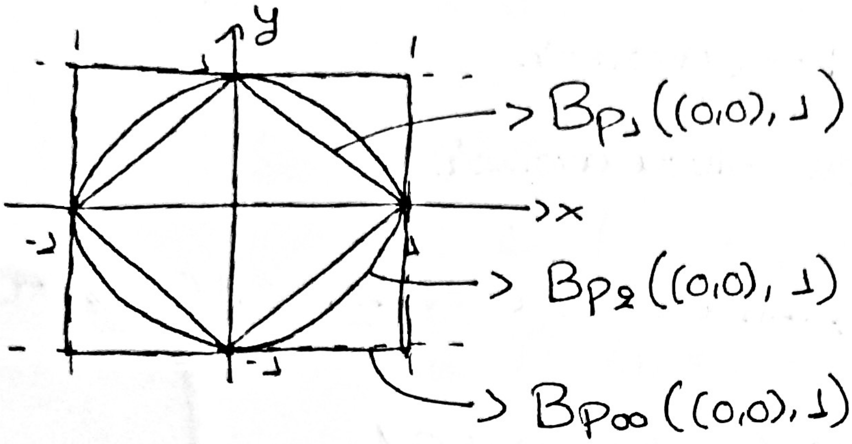


$B_{\rho_1}((x_0,y_0),\varepsilon)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x-x_0|+|y-y_0|<\varepsilon\}$

δ) $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$



$$B_{\rho_\infty}((x_0,y_0),\varepsilon) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\times(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$$



ε) Αν ρ η διακριτή μετρική σε ένα σύνολο X, $x_0\in X$, $\varepsilon >$

$$B_\rho(x_0,\varepsilon) = \begin{cases} \{x_0\}, & \text{αν } 0<\varepsilon<1 \\ X, & \text{αν } \varepsilon\geq 1 \end{cases}$$

SOS ορισμός: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $G\subseteq X$. Το G λέγεται ανοιχτό (ως προς ρ) [ή ρ-ανοιχτό] αν $\forall x_0\in G$ $\exists \varepsilon>0$ ώστε $B_\rho(x_0,\varepsilon)\subseteq G$

$(\forall x_0\in G, \exists \varepsilon>0, B_\rho(x_0,\varepsilon)\subseteq G)$

Παραδείγματα: α) Στο $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική ρ αν $a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$ τότε το ανοιχτό διάστημα (a,b) είναι ανοιχτό.

Απάντηση: Έστω $x_0\in(a,b)$ δηλαδή $a<x_0<b$.
Θέτοντας $\varepsilon=\min\{x_0-a, b-x_0\}>0$ έχουμε

$$\underbrace{(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)}_{= B_\rho(x_0,\varepsilon)}\subseteq(a,b)$$

→ Το σύνολο $[a,\beta)$ δεν είναι ανοιχτό διότι $\nexists\ \varepsilon>0$ ώστε $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq [a,\beta)$

→ Το $\{a\}$ δεν είναι ανοιχτό

→ Τα $[a,+\infty)$, $(-\infty,a]$, $(a,\beta]$ δεν είναι ανοιχτά

→ Τα $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$ είναι ανοιχτά.

→ Τα σύνολα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοιχτά.

β) Αν ρ η διακριτή μετρική στο X τότε κάθε $A\subseteq X$ είναι ρ-ανοιχτό.

Πράγματι αν $x_0\in A$: $B_\rho(x_0, 1/2) = \{x_0\} \subseteq A$.

<u>Πρόταση</u>: Έστω (X,ρ) μ.χ. Αν $a\in X$ και $\varepsilon>0$ η ανοιχτή μπάλα $B_\rho(a,\varepsilon)$ είναι ανοιχτό σύνολο.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x_0\in B_\rho(a,\varepsilon)$ δηλαδή $\rho(a,x_0)<\varepsilon$

θέτουμε $\delta = \varepsilon - \rho(a,x_0)$ ①

Θ.δ.ο. $B_\rho(x_0,\delta) \subseteq B_\rho(a,\varepsilon)$

Έστω $x\in B_\rho(x_0,\delta) \Rightarrow \rho(x,x_0)<\delta$

Τότε $\rho(x,a) \leq \rho(x,x_0)+\rho(x_0,\delta) < \delta + \rho(a,x_0) \overset{①}{<} \varepsilon$

τριγωνική ανισότητα

άρα $\rho(x,a)<\varepsilon$ δηλαδή $x\in B_\rho(a,\varepsilon)$.

Άρνηση του ορισμού ανοιχτού συνόλου: (X,ρ) μ.χ. ένα $A\subseteq X$ δεν είναι ανοιχτό $\Leftrightarrow$ $\exists x_0\in A$: $\forall \varepsilon>0$ $B_\rho(x_0,\varepsilon)\nsubseteq A \Leftrightarrow$

$B_\rho(x_0,\varepsilon)\cap(X\setminus A)\neq\emptyset$

Παρατηρήσεις: i) Από το β) χρησιμοποιώντας επαγωγή προκύπτει ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ αν $A_1, \dots, A_n$ ανοιχτά σύνολα τότε $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ είναι ανοιχτό.

ii) Αν έχουμε μια άπειρη οικογένεια ανοιχτών συνόλων σε ένα μ.χ. η τομή τους δεν είναι κατ'ανάγκη ανοιχτό σύνολο.

Π.χ. Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.

$$A_n = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right), \; n \in \mathbb{N}$$

Το A_n είναι ανοιχτό για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όμως $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$ που δεν είναι ανοιχτό.

Ορισμος: Αν X είναι ένα σύνολο και τ μια οικογένεια υποσυνόλων του X (δηλ. $\tau \subseteq P(X)$: δυναμοσύνολο) λέμε ότι η τ είναι μια τοπολογία στο X, αν:

α) $\emptyset, X \in \tau$

β) Αν $A, B \in \tau$ τότε $A \cap B \in \tau$

γ) Αν $(A_i)_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια συνόλων της τ

και το ζεύγος (X, τ) λέγεται τοπολογικός χώρος.

Ορισμός: Έστω (X, ρ) μ.χ. και $A \subseteq X$.

α) Ένα $x_0 \in X$ λέγεται εσωτερικό σημείο του A, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq A$

β) Το εσωτερικό του συνόλου A είναι το των εσωτερικών σημείων του A. Το εσωτερικό του A, συμβολίζεται με A^o, $\text{int}A$.

<u>Πρόταση</u>: (Βασικές ιδιότητες ανοιχτών συνόλων)

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος

α) Τα σύνολα $\emptyset, X$ είναι ανοιχτά

β) Αν τα A, B είναι ανοιχτά, τότε το $A \cap B$ είναι ανοιχτό

γ) Αν $(A_i)_{i \in I}$ τότε οποιαδήποτε οικογένεια ανοιχτών συνόλων το $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι ανοιχτό σύνολο.

<u>Απόδειξη</u>: α) Το X είναι ανοιχτό (αν $x_0 \in X$ για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ $B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq X$), το $\emptyset$ είναι ανοιχτό [αν δεν ήταν τότε σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση θα $\exists x_0 \in \emptyset$: Άτοπο]

β) Έστω A, B δύο ανοιχτά σύνολα. Θ.δ.ο. $A \cap B$ είναι ανοιχτό. Έστω $x_0 \in A \cap B$ τότε $x_0 \in A$ και $x_0 \in B$. Εφόσον το A είναι ανοιχτό υπάρχει $\varepsilon_1 > 0$, ώστε $B_\rho(x_0, \varepsilon_1) \subseteq A$. Εφόσον το B είναι ανοιχτό υπάρχει $\varepsilon_2 > 0$ ώστε $B_\rho(x_0, \varepsilon_2) \subseteq B$.

Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, τότε $\varepsilon > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq B_\rho(x_0, \varepsilon_1) \subseteq A \\ B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq B_\rho(x_0, \varepsilon_2) \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq A \cap B.$$

Άρα $A \cap B$ ανοιχτό.

γ) Έστω $x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Τότε υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x_0 \in A_{i_0}$

Εφόσον το A_{i_0} είναι ανοιχτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq A_{i_0}$. Τότε $B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$

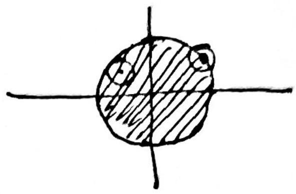
Επομένως το σύνολο $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι ανοιχτό.

$A^\circ = \operatorname{int} A = \{x_0 \in X,\ \exists\, \varepsilon > 0 : B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq A\}$

<u>Παραδείγματα</u>: α) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ τότε:

- $(\alpha, \beta)^\circ = (\alpha, \beta)$
- $[\alpha, \beta]^\circ = (\alpha, \beta)$
- $[\alpha, \beta)^\circ = (\alpha, \beta)$
- $(\alpha, \beta] = (\alpha, \beta)$
- $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$
- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$

β) Στον $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$



$A = \hat{B}_{\rho_2}((0,0), 1)$

$A^\circ = B_{\rho_2}((0,0), 1)$

γ) Στον (X, ρ), διακριτή μετρική ρ. Αν $x_0 \in X$ και $A = \hat{B}_\rho(x_0, 1)$ έχουμε $A = X$ και άρα $A^\circ = X$, ενώ $B_\rho(x_0, 1) = \{x_0\}$, δηλαδή $\left(\hat{B}_\rho(x_0, 1)\right)^\circ \neq B_\rho(x_0, 1)$.

<u>Πρόταση</u>: Έστω (X, ρ) μ.χ. και $A, B \subseteq X$ τότε:

i) $A^\circ \subseteq A$

ii) $A^\circ = \bigcup\{V : V \subseteq A,\ V : \text{ανοιχτό}\}$, ειδικότερα το A° είναι ανοιχτό (και μάλιστα το μέγιστο ανοιχτό που περιέχεται στο A).

iii) Αν $A \subseteq B$ τότε $A^\circ \subseteq B^\circ$

iv) $A = A^\circ \Leftrightarrow A$ ανοιχτό

v) $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.